Lineare Funktion

Wolfgang Kippels

10. Mai 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

> *Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.*

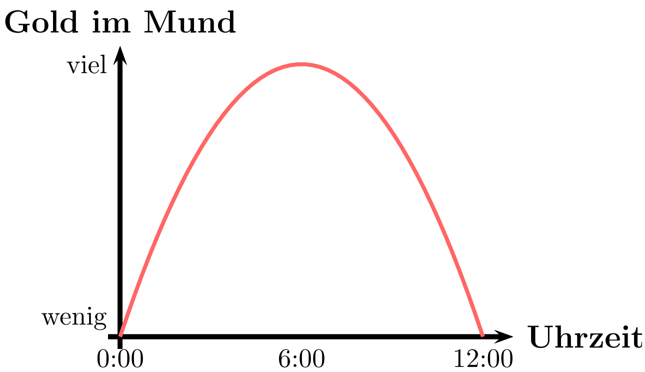
Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: mail@dk4ek.de

Vielen Dank!

2 Grundlegende Zusammenhänge

2.1 Was ist eine Funktion?

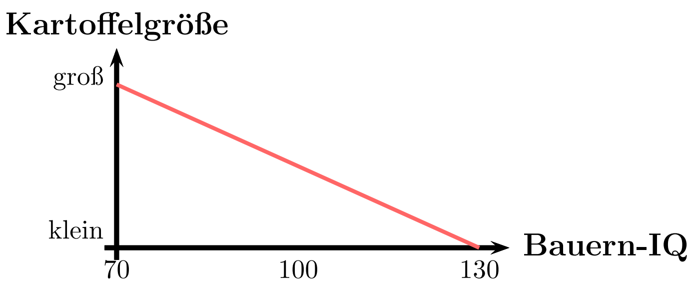
Eine **Funktion** stellt einen Zusammenhang zwischen zwei (oder auch mehr) Größen dar. In diesem Skript bleiben wir bei nur zwei Größen. Dabei sind die Größen **nicht** gleichberechnigt, eine Größe hängt von der anderen ab.



Nebenstehend ist ein altes Sprichwort[1] als Funktionsgraph dargestellt.[2] Die beiden Größen, die hier im Zusammenhang stehen sind in diesem Fall:
1. Die Uhrzeit
2. Die Goldmenge im Mund
Dabei ist die Uhrzeit die **unabhängige** Größe. Die gibt man vor und schaut dann in der Grafik nach, wie groß dabei jeweils die **abhängige** Größe – hier die Goldmenge im Mund – wird. In der Grafik erkennt man, dass es gegen Mitternacht und gegen Mittag relativ wenig ist, gegen 6:00 Uhr am Morgen aber viel.

Wichtig ist folgendes: Zu **jedem** Wert der unabhängigen Größe (hier der Uhrzeit) gibt es **genau einen** Wert der abhängigen Größe (hier der Goldmenge im Mund). Umgekehrt muss das nicht unbedingt gelten! Suche ich mir eine bestimmte Goldmenge aus, dann finde ich nicht eindeutig eine bestimmte Uhrzeit, die dazu passt. Meist sind es zwei verschiedene Zeiten.

2.2 Was ist eine Lineare Funktion?



Ein Beispiel für eine **Lineare Funktion** gehört ebenfalls zu einem alten Sprichwort[3]. Der Funktionsgraph dieser Funktion ist nebenstehend dargestellt. Man nennt sie **Lineare Funktion**, weil der Zusammenhang zwischen den beiden Größe eine **gerade Linie** ergibt. In diesem Beispiel stellt der Intelligenzquotient der Bauern die

[1]Sie kennen das Sprichtwort:„Morgenstund hat Gold im Mund.“
[2]Inspiriert hat mich dazu ein Beitrag in der Zeitschrift Stern, Heft 23/2019 und 28/2019, Rubrik Humor.
[3]Wer kennt das Sprichtwort nicht:„Der dümmste Bauer hat die dicksten Kartoffeln.“

unabhängige und die Kartoffelgröße die abhängige Größe dar.

Wie das Ganze mathematisch in den Griff zu bekommen ist, wird nun im Folgenden dargestellt.

2.3 Aufbau der Linearen Funktion

Eine ***Lineare Funktion*** ist eine Funktion, die sich in dieser Form darstellen lässt:

$$\boxed{y = f(x) = m \cdot x + b}$$

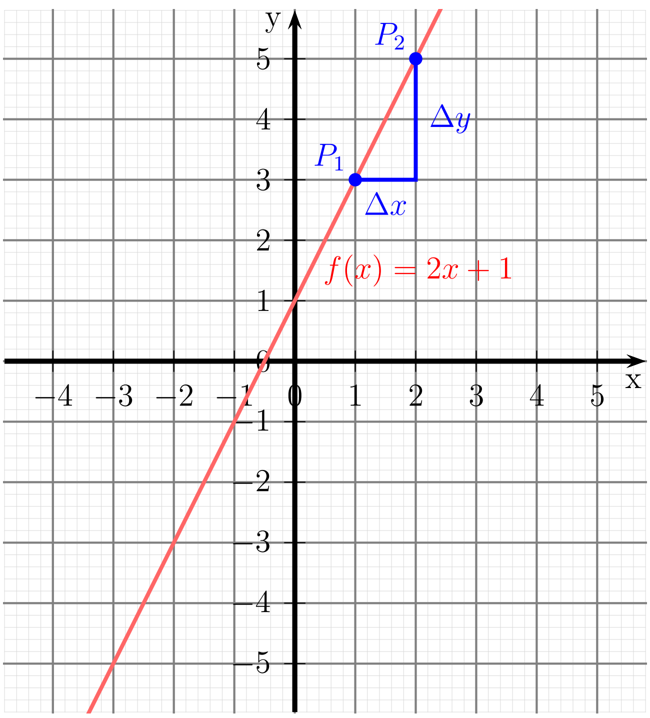
Dabei stellen die Parameter m und b bestimmte Eigenschaften der Funktion dar, und zwar folgende:

- m: Die Steigung der Funktion
- b: Den y-Achsenabschnitt der Funktion.

Dabei ist die Steigung wie folgt definiert:

$$\boxed{m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

In dieser Formel kommen die Werte x_1, y_1, x_2 und y_2 vor. Sie stellen die Koordinaten von zwei beliebigen Punkten $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ dar, die genau auf der Geraden von $f(x)$ liegen.



Nebenstehend ist die Funktion $f(x) = 2x + 1$ dargestellt. Auf den ersten Blick erkennt man sofort, dass die Gerade bei $y_0 = 1$ die y-Achse schneidet. In der Funktionsgleichung erkennt man das daran, dass $b = 1$ ist.

Auch die Steigung kann man am Funktionsgraphen ablesen. Geht man von einem beliebigen Punkt P_1 eine Einheit nach *rechts*, dann gibt der Wert der Steigung an, um wieviele Einheiten man nach *oben* gehen muss. Muss man nicht nach oben, sondern nach *unten* gehen, dann ist die Steigung *negativ.*

Im vorgestellten Beispiel muss man für jede Einheit nach rechts um 2 Einheiten nach oben gehen, da die Steigung der Funktion $m = 2$ ist.

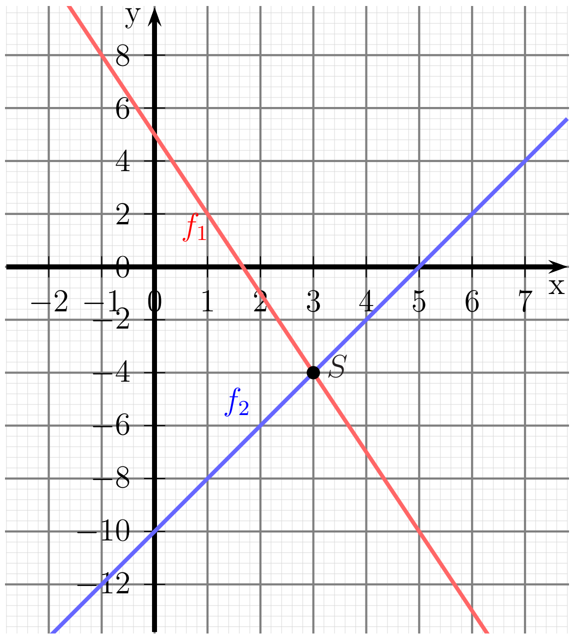
2.4 Nullstellenbestimmung

Will man den Abschnitt auf der x-Achse – die sogenannte „Nullstelle“ – wissen, kan man den entsprechenden Wert nicht sofort an der Funktionsgleichung ablesen. Man kann ihn aber berechnen. Dies macht man, indem man den Funktionsterm gleich Null setzt und nach x auflöst:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ 2x_0 + 1 &= 0 \quad | -1 \\ 2x_0 &= -1 \quad | : 2 \\ x_0 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

2.5 Schnittpunktbestimmung

Die Bestimmung des Schnittpunktes zweier Geraden zeige ich an einem Beispiel. Gegeben seien die beiden Funktionen $f_1(x) = -3x + 5$ und $f_2(x) = 2x - 10$.



Der Schnittpunkt $S(x_s|y_s)$ ist der Punkt, der **beide** Funktionsgleichungen erfüllt. Setzen wir seine allgemeinen Koordinaten x_s und y_s in die beiden Funktionsgleichungen ein, dann erhalten wir ein Lineargleichungssystem mit zwei Variablen.

$$\begin{aligned} y_s &= -3x_s + 5 \\ y_s &= 2x_s - 10 \end{aligned}$$

Da beide Gleichungen nach y_s aufgelöst sind, bietet sich das **Gleichsetzungsverfahren** zur Lösung an. Das gilt nicht nur für diese Aufgabe, das ist bei Schnittpunktbestimmungen **immer** so.

$$\begin{aligned} -3x_s + 5 &= 2x_s - 10 \quad | -2x_s - 5 \\ -5x_s &= -15 \quad | : (-5) \\ x_s &= 3 \end{aligned}$$

Den zugehörigen Wert y_s kann man beliebig mit einer der beiden Funktionen bestimmen. Ich wähle dafür $f_2(x) = 2x - 10$ aus.

$$\begin{aligned} y_s &= f_2(x_s) \\ f_2(x) &= 2x - 10 \\ y_s &= 2 \cdot 3 - 10 \\ y_s &= -4 \end{aligned}$$

Schnittpunkt: $S(3|-4)$

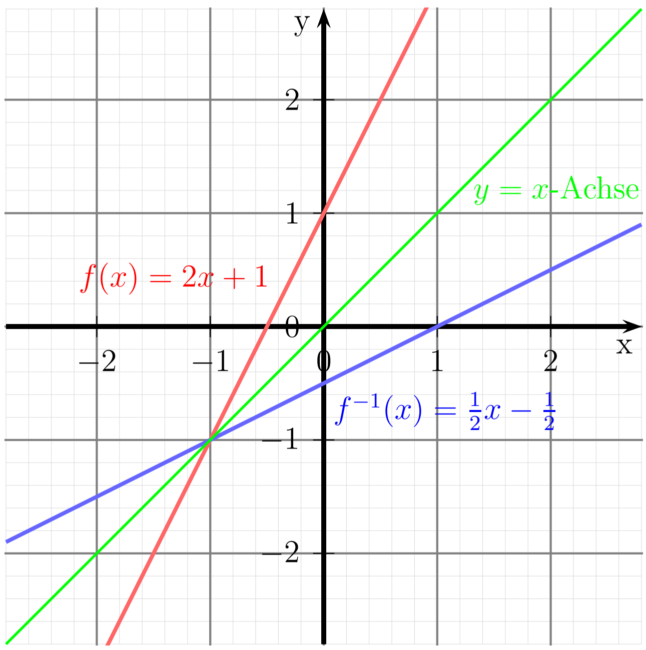
2.6 Umkehrfunktion

Wenn man die „Rollen“ von x und y tauscht und dann die Gleichung neu nach y auflöst, erhält man die sogenannte ***Umkehrfunktion*** $f^{-1}(x)$. Ein Beispiel soll verdeutlichen, was damit gemeint ist.

$$\begin{aligned} y &= f(x) = 2x + 1 \quad | \text{„Rollentausch“} \\ x &= 2y + 1 \quad | -1 \\ x - 1 &= 2y \quad | : 2 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} &= y \\ f^{-1}(x) &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Nebenstehend ist die eben besprochene Funktion $f(x) = 2x + 1$ in rot zusammen mit ihrer Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ in blau dargestellt.

Schaut man sich deren Lage zueinander genauer an, dann kann man feststellen, dass sie spiegelbildlich zueinander zu einer Achse liegen, die den ersten Quadranten in einem 45^0-Winkel teilt. Diese Achse nennt man auch $y = x$-Achse, weil die zugehörige Funktionsgleichung $y = f(x) = x$ heißt. Sie ist hier in der Farbe grün dargestellt.



2.7 Schnittwinkel zwischen Geraden

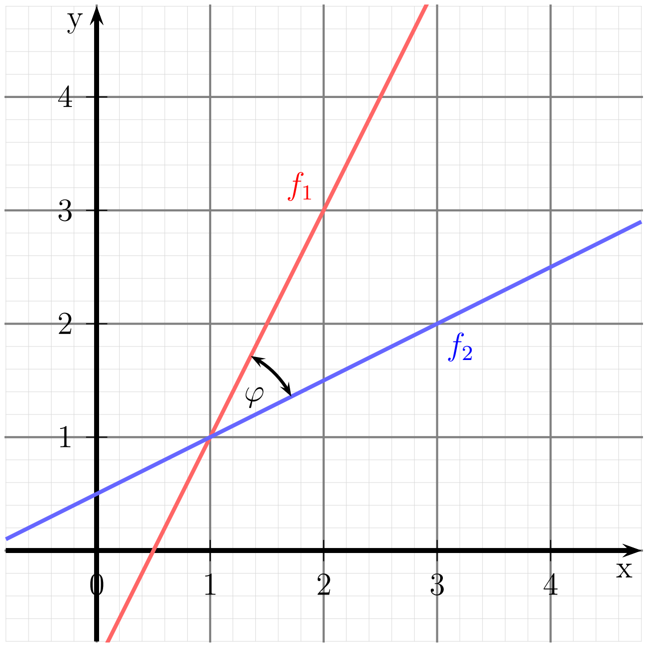
2.7.1 Allgemeiner Schnittwinkel

Schneiden sich zwei Geraden, dann entsteht zwischen diesen Geraden ein Schnittwinkel φ. Man kann zeigen, dass dieser Winkel mit nachfolgender Formel berechnet werden kann.

$$\tan\varphi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

Hierbei wird davon ausgegangen, dass m_1 die Steigung der Funktion f_1 und m_2 die Steigung der Funktion f_2 ist.

Auf den Beweis der Formel soll an dieser Stelle verzichtet werden. Er kann mit Hilfe der *Additionstheoreme der Trigonometrie* durchgeführt werden.



Wenn $m_1 < m_2$ ist, dann erhalten wir einen **negativen** Schnittwinkel. Will man das vermeiden, dann muss man den **Betrag** des Bruches bilden. Wir erhalten die endgültige Formel:

$$\boxed{\tan\varphi = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|}$$

Achtung! Will man mit dieser Formel φ berechnen, dann erhält man für den Fall, dass $\varphi > 90°$ ist, über die Arcustangens-Funktion nur den kleineren *Ergänzungswinkel* φ^* mit $\varphi^* = 180° - \varphi$. Dies ist immer dann der Fall, wenn der **Nenner negativ** wird. In diesem Fall muss also noch umgerechnet werden.

Anmerkung: Für den Fall, dass $m_1 \cdot m_2 = -1$ ist, ist der Nenner Null, der Bruch also nicht definiert. Mit der angegebenem Formel kann daher kein Winkel berechent werden. Dieser Fall wird im nächsten Kapitel behandelt.

Beispiel 1 Gegeben sind die beiden Funktionen:

$$f_1(x) = 2x - 1$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

(Das sind die Funktionen aus der obigen Skizze.)

Der Schnittwinkel wird berechnet:

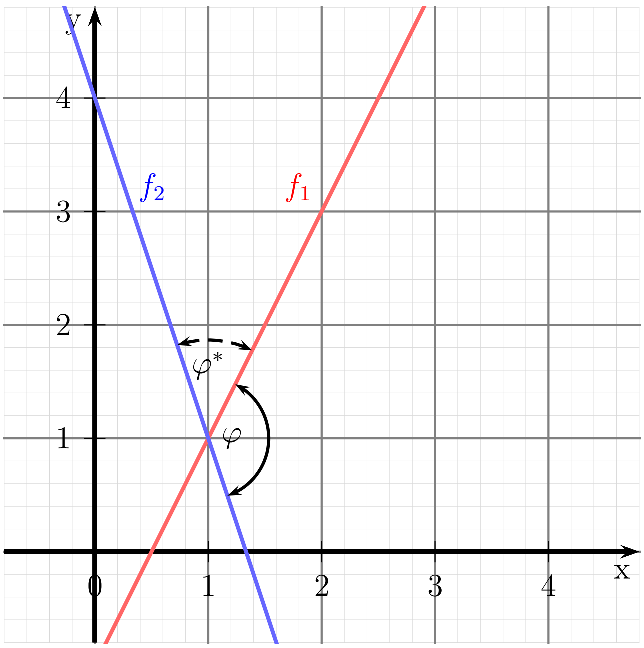
$$\begin{aligned}
\tan\varphi &= \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right| \\
\tan\varphi &= \left|\frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}}\right| \\
\tan\varphi &= \left|\frac{\frac{3}{2}}{2}\right| \\
\tan\varphi &= \frac{3}{4} \\
\varphi &= \arctan\frac{3}{4} \\
\varphi &\approx 36{,}87°
\end{aligned}$$

Beispiel 2 Gegeben sind die beiden Funktionen:

$$f_1(x) = 2x - 1$$

$$f_2(x) = -3x + 4$$

Nebenstehend sind die beiden Funktionsgraphen dargestellt. Wie man gut erkennen kann, ist der gesuchte Winkel φ **größer** als 90°. Demnach wird bei der Berechnung der Ergänzungswinkel φ^* als Ergebnis herauskommen. Wir werden also am Ende der Berechnung den gesuchten Winkel φ aus φ^* umrechnen müssen.



Wir berechnen nun den Winkel φ^*.

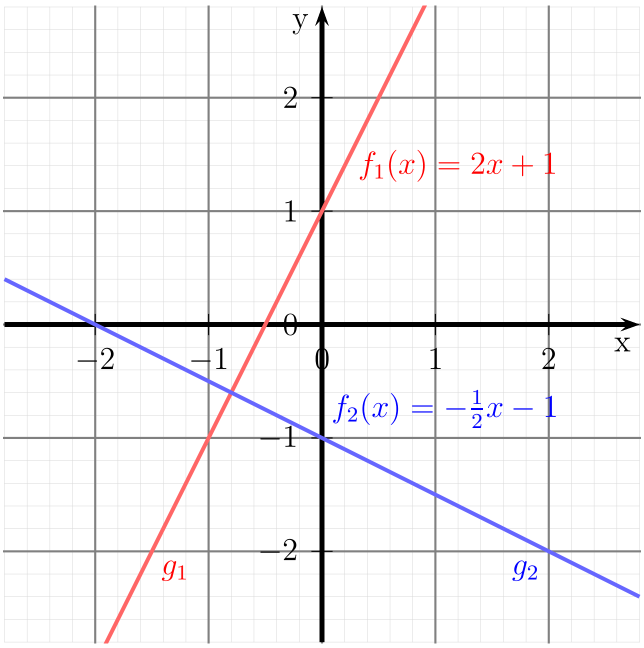
$$
\begin{aligned}
\tan\varphi &= \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right| \\
\tan\varphi &= \left|\frac{2 - (-3)}{1 + 2 \cdot (-3)}\right| \\
\tan\varphi &= \left|\frac{5}{-5}\right| \\
\varphi &= \arctan|-1| \\
\varphi^* &= 45^\circ
\end{aligned}
$$

Der Nenner ist negativ geworden; die Vermutung, dass der gesuchte Winkel größer als 90° sein muss, war also richtig. Deshalb haben wir als Ergebnis nicht den tatsächlich gesuchten Winkel φ, sondern den Ergänzungswinkel φ^* erhalten. Damit kann der eigentlich gesuchte Winkel φ bestimmt werden:

$$\varphi = 180^\circ - \varphi^* = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

2.7.2 Rechtwinkliges Schneiden

Wie schon im vorangehenden Kapitel dargestellt, gibt es immer einen ***Schnittwinkel***, wenn sich zwei Geraden schneiden. Ist dieser Schnittwinkel ein ***Rechter Winkel***, dann sagt man:„***Die Geraden schneiden sich rechtwinklig***." oder:„***Die Geraden stehen senkrecht aufeinander***." Man kann auch sagen:„***Die Geraden sind zueinander orthogonal***."



Nebenstehend sind die Graphen zweier Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ dargestellt, für die diese Bedingung zutrifft. Wenn man diese beiden Geraden in Gedanken hin und her dreht, dann kommt man leicht zu folgenden Zusammenhängen: Wenn die Gerade g_1 steigt, dann fällt die Gerade g_2 und umgekehrt. Wenn die Gerade g_1 steiler wird, dann verläuft die Gerade g_2 entsprechend flacher. Natürlich kann man das auch durch eine Formel ausdrücken. Die Formel ergibt sich aus der allgemeinen Schnittpunktformel aus dem vorangegangenen Kapitel. Da der Tangens für einen Rechten Winkel nicht existiert (bzw. unendlich groß ist), ist in der Schnittwinkel-Formel der Nenner gleich Null. Das führt zu nachfolgender Formel. Sie lautet für zwei Funktionen mit $f_1(x) = m_1 \cdot x + b_1$ und $f_2(x) = m_2 \cdot x + b_2$:

$$\textbf{Bedingung für Orthogonalität:} \quad \boxed{m_1 \cdot m_2 = -1}$$

Anmerkung: Diese Bedingung haben wir im vorangegangenen Kapitel „Schnittwinkel" als die Bedingung kennengelernt, für die die gefundene Formel nicht definiert war. Der Tangens eines Rechten Winkels ist ja bekanntlich nicht definiert. Mit dieser Bedingung sind wir somit in der Lage, **jeden** Schnittwinkel zu bestimmen.

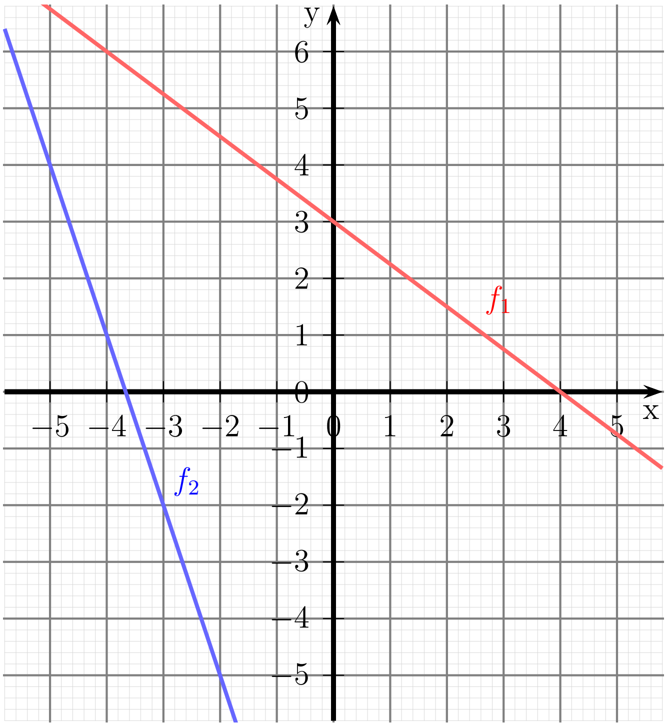
3 Übungsaufgaben

3.1 Aufgabe 1

Nebenstehendes Diagramm zeigt die Funktionsgraphen zweier Funktionen. Die Funktion $f_1(x)$ ist rot dargestellt, die Funktion $f_2(x)$ ist blau.

Bestimmen die die Funktionsgleichungen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ der beiden Funktionen.

Berechnen Sie auch den Schnittpunkt S der beiden Funktionsgraphen!



3.2 Aufgabe 2

Eine Gerade hat eine Steigung von $m = -0,5$ und eine Nullstelle bei $x_0 = 12$. Wie lautet die zugehörige Funktion $f(x)$?

3.3 Aufgabe 3

Bestimmen Sie die **Umkehrfunktionen** $f_1^{-1}(x)$ und $f_2^{-1}(x)$ der beiden Funktionen $f_1(x) = 5x + 15$ und $f_2(x) = -x + 3$.

3.4 Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$ der Geraden, die durch den Punkt $P(3|-2)$ parallel zur Geraden mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = -5x + 9$ verläuft.

3.5 Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ der Geraden, die durch die Punkte $P_1(-2|5)$ und $P_2(5|-2)$ verläuft!

3.6 Aufgabe 6

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$ der Geraden g_1, die die Gerade g_2 mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = 3x - 13$ an der Stelle $x_s = 6$ rechtwinklig schneidet.

3.7 Aufgabe 7

Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der beiden Geraden g_1 und g_2 mit den zugehörigen Funktionsgleichungen $f_1(x) = 12x + 5$ und $f_2(x) = 10x - 3$.

3.8 Aufgabe 8

Die drei Geraden g_1, g_2 und g_3 mit $f_1(x) = 3x + 2$, $f_2(x) = -x - 6$ und $f_3(x) = m \cdot x - 8$ schneiden sich alle im gleichen Punkt. Bestimmen Sie die Steigung m in der Funktion $f_3(x)$!

3.9 Aufgabe 9

Welchen Abstand hat der Punkt $P(7|3)$ von der Geraden g_1 mit der Funktionsgleichung $f_1(x) = \frac{12}{5}x + 20$?
Lösungshinweis: Bestimmen Sie dazu die Funktionsgleichung $f_2(x)$ der Geraden g_2 durch P senkrecht zur Geraden g_1.

3.10 Aufgabe 10

Die Gerade g verläuft in der Mitte zwischen den Punkten $P_1(1|-5)$ und $P_2(-5|7)$ hindurch und schneidet ihre Verbindungslinie rechtwinklig. Wie lautet die zugehörige Funktionsgleichung $f(x)$?

3.11 Aufgabe 11

Silke zieht in die erste eigene Wohnung. Nun sucht sie nach einem für sie günstigen Tarif für elektrischen Strom. Sie fragt zwei Freunde.

Peter sagt:„Ich zahle eine jährliche Grundgebühr von 44,00 € sowie 0,23 € für jede verbrauchte Kilowattstunde.“

Paul sagt:„Meinen Tarif kenne ich nicht genau, aber im letzten Jahr habe ich für 1 450 kWh 370,00 € bezahlt und im vorletzten Jahr für 1 350 kWh 350,00 €.“

1. Stellen Sie den Zusammenhang zwischen dem Jahresenergieverbrauch E und den jährlichen Kosten K für beide Tarife im Bereich zwischen 0 und 3 000 kWh in einem Koordinatensystem dar. Dabei stellt die waagerechte Achse (gern auch x-Achse genannt) den Jahresenergieverbrauch E und die senkrechte Achse (gern auch y-Achse genannt) die Jahreskosten K dar.
2. Bestimmen Sie **zeichnerisch** den Jahresverbrauch, bei dem beide Tarife gleich teuer sind.
3. In welchem Bereich des Jahresverbrauches ist Peters Tarif und in welchem ist Pauls Tarif günstiger?
4. Bestimmen Sie aus den angegebenen Daten die Funktionsgleichungen:

$$K = f_1(E) \quad \text{und} \quad K = f_2(E)$$

5. **Berechnen** Sie mit Hilfe der Funktionsgleichungen den Jahresverbrauch, bei dem beide Tarife gleich teuer sind.
6. Vergleichen Sie das berechnete Ergebnis mit dem zeichnerisch ermittelten Ergebnis.

3.12 Aufgabe 12

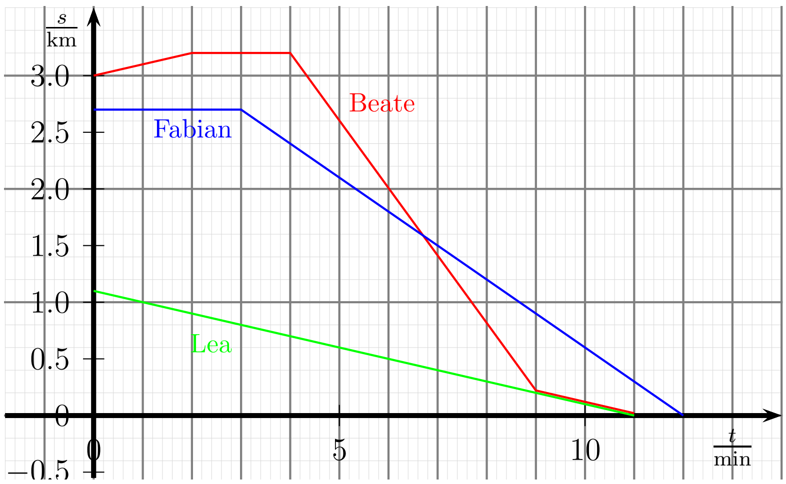
Lisa und Fiona wohnen im selben Haus und besuchen die selbe Schule, die 2,4 km vom Wohnhaus entfernt liegt. Lisa geht mit einer Geschwindigkeit von 6 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ zu Fuß zur Schule, Fiona nutzt das Fahrrad mit einer Geschwindigkeit von 18 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Lisa läuft um 8:00 Uhr los. Fiona steigt um 8:14 Uhr auf das Fahrrad.

1. Stellen Sie in einem Koordinatensystem den zurückgelegten Weg als Funktion der Zeit für Lisa und Fiona dar!
2. Klären Sie zeichnerisch die Frage, ob Fiona Lisa noch vor Erreichen der Schule überholt. Falls das der Fall ist, um wieviel Uhr und in welcher Entfernung von der Schule passiert das?
3. Stellen Sie für Lisa und Fiona die Funktionsgleichung auf, die den zurückgelegten Weg s als Funktion der Zeit t darstellt.
$$s = f(t)$$
4. Bestimmen Sie **rechnerisch** den Zeitpunkt und die Entfernung von der Schule, an dem Fiona Lisa überholt.

3.13 Aufgabe 13

Nebenstehend sind von drei Schülern die Weg-Zeit-Diagramme dargestellt. An der Weg-Achse ist der Abstand von der Schule eingetragen.

Erzählen Sie zu jedem Schulweg, was dort passiert.



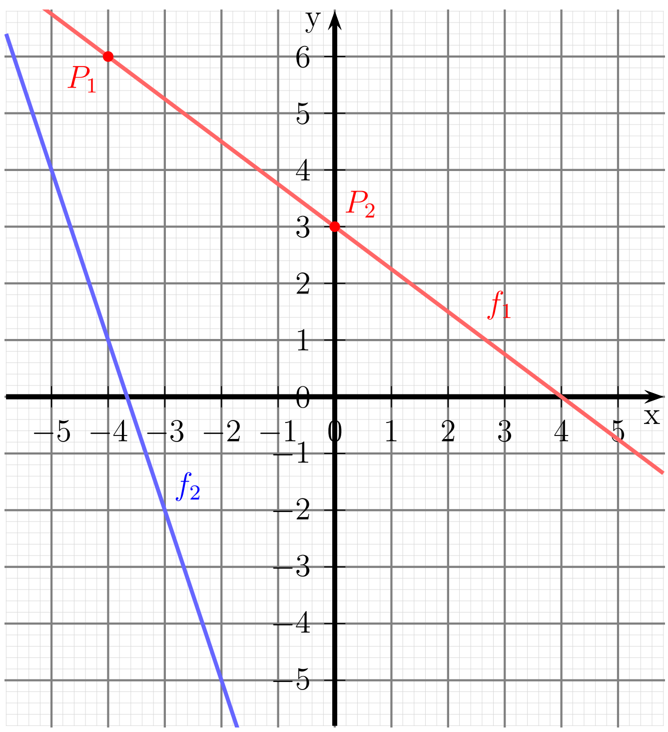
Weitere Übungsaufgaben sind hier zu finden:

https://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/linfkt2.pdf

4 Lösungen der Übungsaufgaben

4.1 Aufgabe 1

Nebenstehendes Diagramm zeigt die Funktionsgraphen zweier Funktionen. Bestimmen die die Funktionsgleichungen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ der beiden Funktionen.
Berechnen Sie auch den Schnittpunkt S der beiden Funktionsgraphen!



Lösung: Beginnen wir mit der Funktion f_1. Die allgemeine Form lautet:

$$f_1(x) = m \cdot x + b$$

Zwei Punkte, deren Koordinaten man gut ablesen kann, sind beispielsweise die Punkte $P_1(-4|6)$ und $P_2(0|3)$. Wenn man von P_1 nach P_2 geht, muss man 4 Einheiten nach rechts und 3 Einheiten nach unten gehen. Damit ist $\Delta x = 4$ und $\Delta y = -3$. Wir erhalten also:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$$

Der Parameter b ist der Abschnitt auf der y-Achse, den man mit $y_0 = 3$ ablesen kann. Eingesetzt in die allgemeine Form erhalten wir:

$$\boxed{f_1(x) = -\tfrac{3}{4}x + 3}$$

Auch für f_2 kann man die Steigung gut ablesen. Mit jeder Einheit, die wir nach rechts gehen, geht man 3 Einheiten nach unten. Damit ist $\Delta x = 1$ und $\Delta y = -3$. Wir erhalten also $m = -3$. Die Funktionsgleichung sieht damit so aus:

$$f_2(x) = -3x + b$$

Den Abschnitt auf der y-Achse kann man nicht ablesen, er liegt außerhalb des dargestellten Diagramms. Daher setzt man von einem beliebigen Punkt, dessen Koordinaten man gut ablesen kann, diese in die Funktionsgleichung ein und bestimmt damit den Parameter b. Ich wähle hierzu den Punkt $P_3(-4|1)$ aus.

$$\begin{aligned} y &= -3x + b \\ 1 &= -3 \cdot (-4) + b \\ 1 &= 12 + b \qquad | - 12 \\ b &= -11 \end{aligned}$$

Den gefundenen Wert für b setzen wir in die Funktionsgleichung ein und erhalten f_2.

$$\boxed{f_2(x) = -3x - 11}$$

Was noch fehlt, ist die Bestimmung des Schnittpunktes. Wie geht das?

Der Schnittpunkt $S(x_s|y_s)$ ist der Punkt, der **beide** Funktionsgleichungen erfüllt. Setzen wir seine allgemeinen Koordinaten x_s und y_s in die beiden Funktionsgleichungen ein, dann erhalten wir ein Lineargleichungssystem mit zwei Variablen.

$$\begin{aligned} y_s &= -\frac{3}{4}x_s + 3 \\ y_s &= -3x_s - 11 \end{aligned}$$

Da beide Gleichungen nach y_s aufgelöst sind, bietet sich das **Gleichsetzungsverfahren**[4] zur Lösung an. Das gilt nicht nur für diese Aufgabe, das ist bei Schnittpunktbestimmungen **immer** so.

$$\begin{aligned} -\frac{3}{4}x_s + 3 &= -3x_s - 11 \quad | + 3x_s - 3 \\ \frac{12}{4}x_s - \frac{3}{4}x_s &= -14 \\ \frac{9}{4}x_s &= -14 \qquad | \cdot \tfrac{4}{9} \\ x_s &= -\frac{56}{9} \end{aligned}$$

<u>Anmerkung:</u> In der Regel ist es sinnvoll, beim Lösen einer Gleichung mit Brüchen die Gleichung **sofort** mit dem **Hauptnenner** zu multiplizieren. Dann fallen alle Brüche weg. In unserem Beispiel sähe das so aus:

$$\begin{aligned} -\frac{3}{4}x_s + 3 &= -3x_s - 11 \quad | \cdot 4 \\ -3x_s + 12 &= -12x_s - 44 \quad | + 12x_s - 12 \\ 9x_s &= -56 \qquad | : 9 \\ x_s &= -\frac{56}{9} \end{aligned}$$

[4] Einzelheiten zum Gleichsetzungsverfahren siehe hier: https://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/lingl.pdf

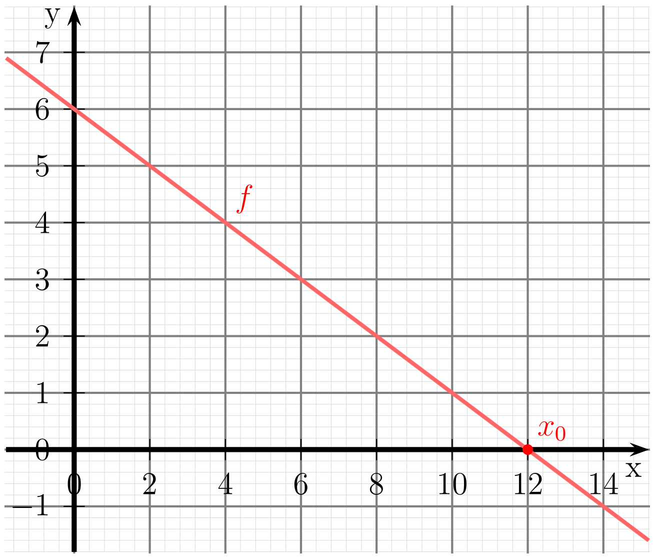
Den zugehörigen Wert y_s kann man beliebig mit einer der beiden Funktionen bestimmen. Ich wähle dafür $f_2(x) = -3x - 11$ aus.

$$\begin{aligned}
y_s &= f_2(x_s) \\
f_2(x) &= -3x - 11 \\
y_s &= -3 \cdot \left(-\frac{56}{9}\right) - 11 \\
&= \frac{56}{3} - \frac{33}{3} \\
y_s &= \frac{23}{3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{S\left(-\tfrac{56}{9} \middle| \tfrac{23}{3}\right)}$$

4.2 Aufgabe 2

Eine Gerade hat eine Steigung von $m = -0,5$ und eine Nullstelle bei $x_0 = 12$. Wie lautet die zugehörige Funktion $f(x)$?



Lösung: Die Normalform für die Lineare Funktion lautet:

$$f(x) = m \cdot x + b$$

Mit der angegebenen Steigung $m = -0,5$ lautet die Funktionsgleichung:

$$f(x) = -0,5 \cdot x + b$$

Wir müssen nur noch b bestimmen.
Das geht, indem wir die Koordinaten der Nullstelle $N(12|0)$ in die Funktion einsetzen und dann nach b auflösen.

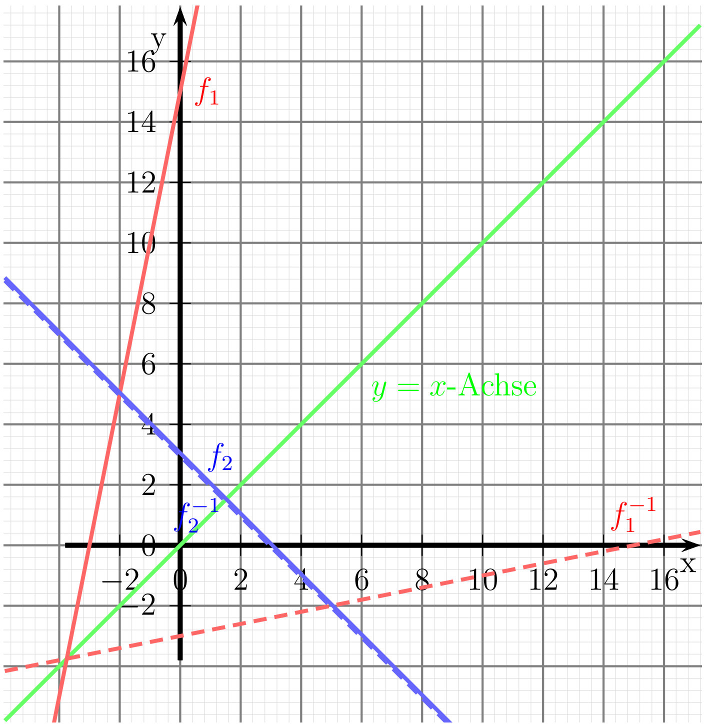
$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ -0,5 \cdot 12 + b &= 0 \\ -6 + b &= 0 \quad | +6 \\ b &= 6 \end{aligned}$$

Wir setzen die gefundenen Werte in die Normalform ein und erhalten die gesuchte Funktionsgleichung:

$$\boxed{f(x) = -0,5 \cdot x + 6}$$

4.3 Aufgabe 3

Bestimmen Sie die **Umkehrfunktionen** $f_1^{-1}(x)$ und $f_2^{-1}(x)$ der beiden Funktionen $f_1(x) = 5x + 15$ und $f_2(x) = -x + 3$.



Lösung: Beginnen wir mir f_1. Wenn man die „Rollen" von x und y tauscht und dann die Gleichung neu nach y auflöst, erhält man die sogenannte ***Umkehrfunktion*** $f^{-1}(x)$.

$$y = 5x + 15$$

Wir machen den Tausch von x und y und lösen nach y auf.

$$\begin{aligned} x &= 5y + 15 \quad &| -15 \\ x - 15 &= 5y \quad &| : 5 \\ \frac{1}{5}x - 3 &= y \\ y &= \frac{1}{5}x - 3 \end{aligned}$$

$$\boxed{f_1^{-1}(x) = \frac{1}{5}x - 3}$$

Es folgt die Berechnung der Umkehrfunktion von f_2.

$$y = -x + 3$$

Wir machen den Tausch von x und y und lösen nach y auf.

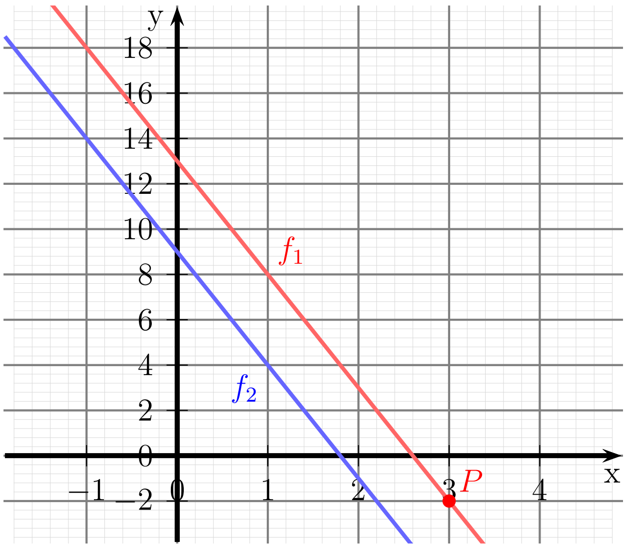
$$\begin{aligned} x &= -y + 3 \quad &| + y \\ x + y &= 3 \quad &| - x \\ y &= -x + 3 \end{aligned}$$

$$\boxed{f_2^{-1}(x) = -x + 3}$$

Anmerkung: Die Umkehrfunktion $f_2^{-1}(x)$ ist identisch mit der urprünglichen Funktion $f_2(x)$!

4.4 Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$ der Geraden, die durch den Punkt $P(3|-2)$ parallel zur Geraden mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = -5x + 9$ verläuft.



Lösung: Wenn zwei Geraden *parallel* verlaufen, dann haben sie die *gleiche Steigung*. Die Steigung für $f_1(x)$ kann also direkt aus $f_2(x)$ mit $m = -5$ übernommen werden.

$$f_1(x) = -5x + b$$

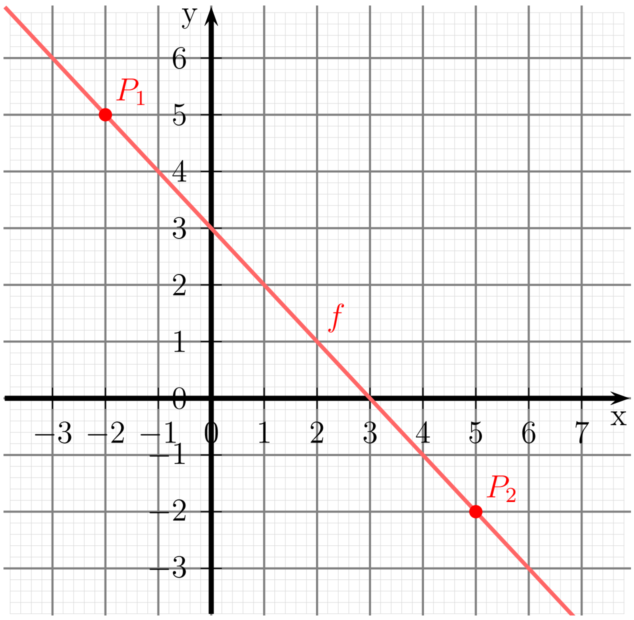
Zur Bestimmung von b setzen wir die Koordinaten des gegebenen Punktes in die Funktionsgleichung ein.

$$\begin{aligned} y &= -5x + b \\ -2 &= -5 \cdot 3 + b \\ -2 &= -15 + b \quad | + 15 \\ 13 &= b \end{aligned}$$

$$\boxed{f_1(x) = -5x + 13}$$

4.5 Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ der Geraden, die durch die Punkte $P_1(-2|5)$ und $P_2(5|-2)$ verläuft!



Lösung: Zu dieser Aufgabe gibt es zwei grundsätzlich verschiedene Lösungsmöglichkeiten. Ich stelle sie nacheinander dar.

Lösungsweg 1:
In die allgemeine Form der Funktionsgleichung $f(x) = m \cdot x + b$ setzt man nacheinander die Koordinaten beider Punkte ein und erhält ein Lineargleichungssystem zweiter Ordnung. In diesem Beispiel soll dieses mit dem Subtraktionsverfahren gelöst werden.

$$
\begin{array}{lrrcll}
(1) & m \cdot (-2) & +b & = & 5 & \\
(2) & m \cdot 5 & +b & = & -2 & \\
\hline
(1) & -2m & +b & = & 5 & |- \\
(2) & 5m & +b & = & -2 & | \\
\hline
 & 7m & & = & -7 & |:7 \\
 & m & & = & -1 &
\end{array}
$$

Das Ergebnis setze ich in Gleichung (1) ein:

$$
\begin{aligned}
-2 \cdot (-1) + b &= 5 \\
2 + b &= 5 \quad |-2 \\
b &= 3
\end{aligned}
$$

$$\boxed{f(x) = -x + 3}$$

Lösungsweg 2:
Aus den Koordinaten der beiden Punkte kann mit Hilfe der Definition der Steigung direkt m bestimmt werden.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-5}{5-(-2)} = \frac{-7}{7} = -1$$

Damit erhalte ich die Funktionsgleichung in dieser Form:

$$f(x) = -x + b$$

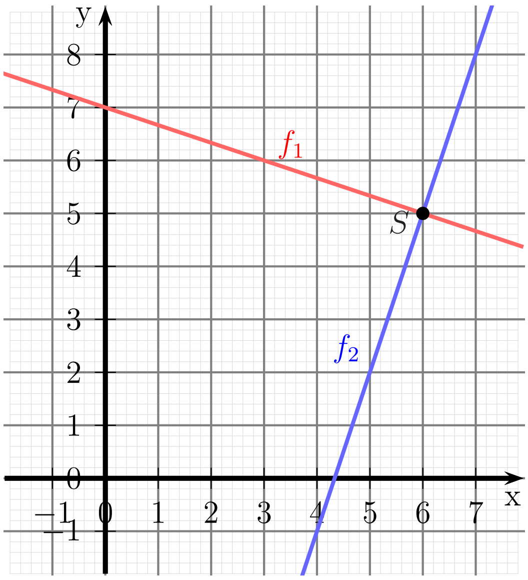
Um b zu bestimmen, setze ich die Koordinaten des Punktes P_1 in diese Gleichung ein:

$$\begin{aligned} 5 &= -(-2) + b \\ 5 &= 2 + b \qquad \qquad | -2 \\ 3 &= b \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = -x + 3}$$

4.6 Aufgabe 6

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$ der Geraden g_1, die die Gerade g_2 mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = 3x - 13$ an der Stelle $x_s = 6$ rechtwinklig schneidet.



Lösung: Die Bedingung für rechtwinkliges Schneiden lautet:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

Damit können wir die Steigung für f_1 bestimmen.

$$\begin{aligned} m_1 \cdot m_2 &= -1 \\ m_1 \cdot 3 &= -1 \qquad | :3 \\ m_1 &= -\frac{1}{3} \\ f_1(x) &= -\frac{1}{3}x + b \end{aligned}$$

Die Geraden schneiden sich bei $x_s = 6$.
Den zugehörigen y-Wert können wir aus der Funktionsgleichung $f_2(x)$ bekommen.

$$y_s = f_2(x_s) = 3 \cdot 6 - 13 = 5$$

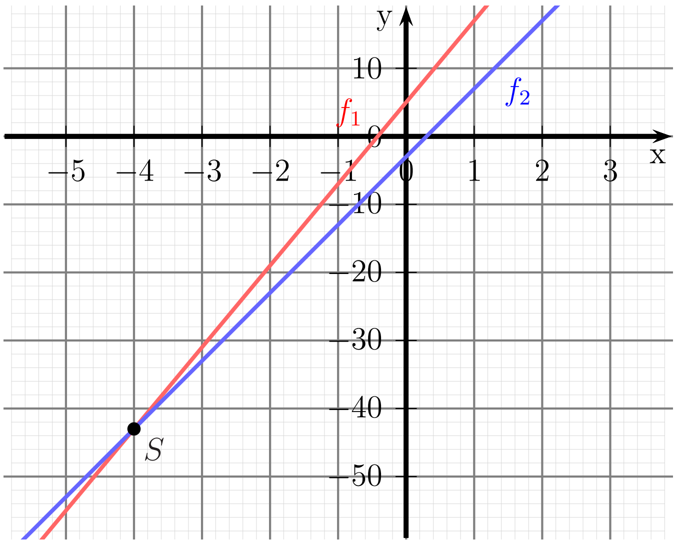
Jetzt können wir die Koordinaten des Schnittpunktes in die Funktionsgleichung von $f_1(x)$ einsetzen, um b zu bestimmen.

$$\begin{aligned} f_1(x_s) &= -\frac{1}{3}x_s + b \\ 5 &= -\frac{1}{3} \cdot 6 + b \\ 5 &= -2 + b \qquad | +2 \\ 7 &= b \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = -\frac{1}{3}x + 7}$$

4.7 Aufgabe 7

Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der beiden Geraden g_1 und g_2 mit den zugehörigen Funktionsgleichungen $f_1(x) = 12x + 5$ und $f_2(x) = 10x - 3$.



Lösung: Zur Schnittpunktbestimmung können die beiden Funktionsterme gleichgesetzt werden. Dadurch erhält man den x-Wert x_S des Scheitelpunktes S. Den zugehörigen y-Wert y_S findet man anschließend, indem man x_S in eine der beiden Funktionsgleichungen für x einsetzt. Hierzu habe ich mir $f_1(x)$ ausgesucht.

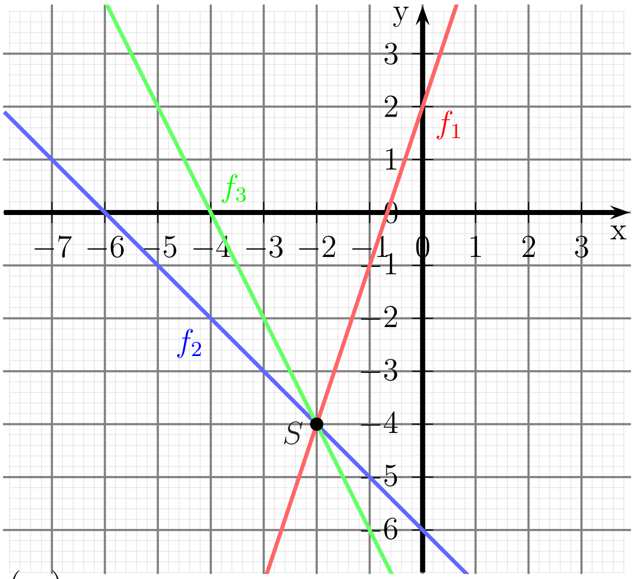
$$\begin{aligned}
f_1(x_s) &= f_2(x_s) \\
12x_s + 5 &= 10x_s - 3 \qquad && | -10x_s - 5 \\
2x_s &= -8 && | : 2 \\
x_s &= -4 \\
\\
y_s &= f_1(x_s) \\
&= 12 \cdot (-4) + 5 \\
y_s &= -43
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Schnittpunkt: } S(-4|-43)}$

4.8 Aufgabe 8

Die drei Geraden g_1, g_2 und g_3 mit $f_1(x) = 3x + 2$, $f_2(x) = -x - 6$ und $f_3(x) = m \cdot x - 8$ schneiden sich alle im gleichen Punkt. Bestimmen Sie die Steigung m in der Funktion $f_3(x)$!

Wir bestimmen zunächst die Koordinaten des Schnittpunktes durch Gleichsetzen der Funktionsterme von $f_1(x)$ und $f_2(x)$.



$$\begin{aligned}
f_1(x_s) &= f_2(x_s) \\
3x_s + 2 &= -x_s - 6 && \mid + x_s - 2 \\
4x_s &= -8 && \mid : 4 \\
x_s &= -2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_s &= f_1(x_s) \\
&= 3 \cdot (-2) + 2 \\
y_s &= -4
\end{aligned}$$

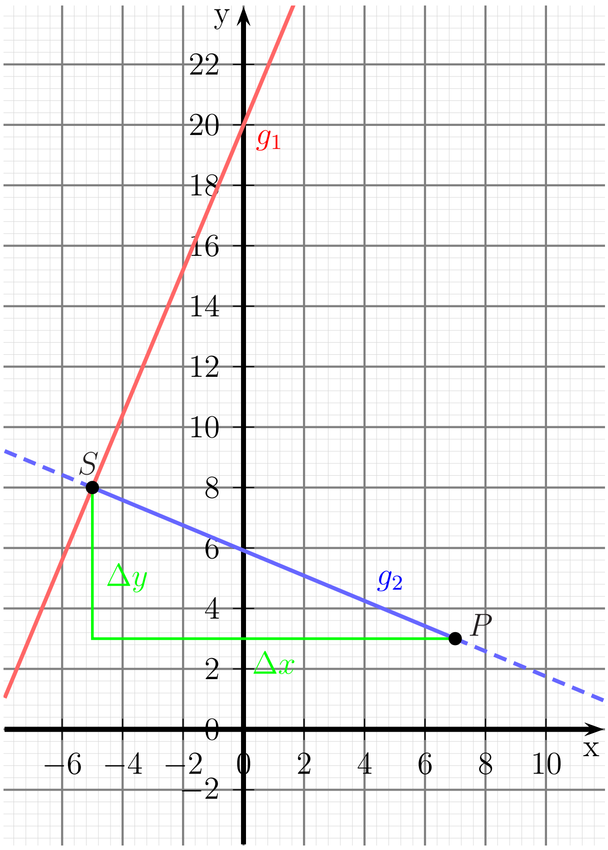
Die Koordinaten des gefundenen Schnittpunktes $S(-2|-4)$ setzen wir nun in $f_3(x)$ ein und lösen nach m auf.

$$\begin{aligned}
y_s &= f_3(x_s) \\
-4 &= m \cdot (-2) - 8 && \mid + 2m + 4 \\
2m &= -4 && \mid : 2 \\
m &= -2
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Steigung: } m = -2}$

4.9 Aufgabe 9

Welchen Abstand hat der Punkt $P(7|3)$ von der Geraden g_1 mit der Funktionsgleichung $f_1(x) = \frac{12}{5}x + 20$?



Lösung: Zur Lösung bestimmen wir die Funktionsgleichung $f_2(x)$ der Geraden g_2 durch P senkrecht zur Geraden g_1. Danach wird der Schnittpunkt S zwischen f_1 und f_2 wird bestimmt. Anschließend kann die Strecke $\overline{PS}$ mithilfe des rechtwinkligen Dreiecks aus der Strecke $\overline{PS}$, Δx und Δy berechnet werden. Das ganze führen wir nun Schritt für Schritt durch.

Die Geradengleichung dieser Funktion lautet $f_2(x) = m_2 \cdot x + b$. Die Steigung erhalten wir über die Bedingung für rechtwinkliges Schneiden mit der Geraden g_1.

$$\begin{aligned} m_1 \cdot m_2 &= -1 \\ \frac{12}{5} \cdot m_2 &= -1 \qquad \Big| \cdot \frac{5}{12} \\ m_2 &= -\frac{5}{12} \end{aligned}$$

Den Parameter b erhalten wir, indem wir die Koordinaten des Schnittpunktes in f_2 einsetzen und die Gleichung nach b auflösen.

$$\begin{aligned} f_2(x_p) &= y_p \\ -\frac{5}{12} \cdot 7 + b &= 3 \\ -\frac{35}{12} + b &= 3 \qquad \Big| + \frac{35}{12} \\ b &= \frac{71}{12} \\ \\ f_2(x) &= -\frac{5}{12}x + \frac{71}{12} \end{aligned}$$

Nun bestimmen wir den Schnittpunkt $S(x_s|y_s)$ zwischen den beiden Geraden. Dazu setzen wir die beiden Funktionsterme gleich.

$$\begin{array}{rcll}
f_1(x_s) & = & f_2(x_s) & \\
\frac{12}{5}x_s + 20 & = & -\frac{5}{12}x_s + \frac{71}{12} & | \cdot 60 \\
144x_s + 1200 & = & -25x_s + 355 & | + 25x_s - 1200 \\
169x_s & = & -845 & | : 169 \\
x_s & = & -5 & \\
 & & & \\
y_s & = & f_1(x_s) & \\
y_s & = & \frac{12}{5} \cdot (-5) + 20 & \\
y_s & = & 8 &
\end{array}$$

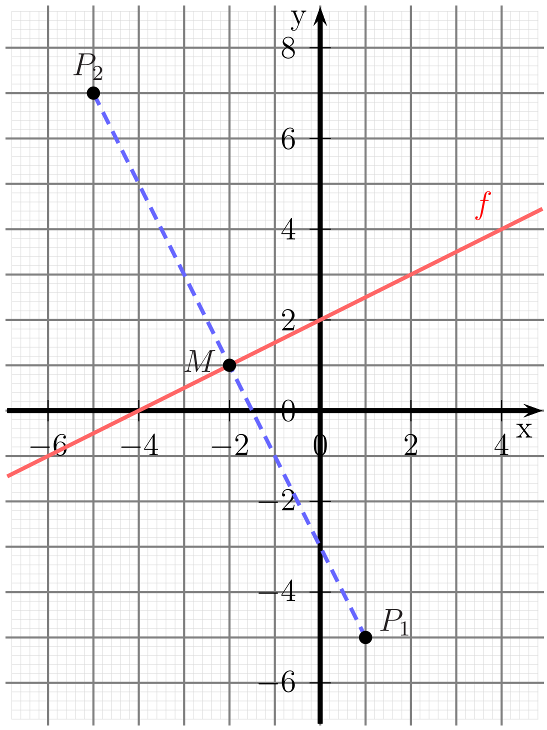
Mit dem gefundenen Schnittpunkt $S(-5|8)$ und dem gegebenen Punkt $P(7|3)$ kann nun der gesuchte Abstand bestimmt werden. Er ist identisch mit der Länge der Strecke $\overline{PS}$. Zeichnet man zwischen P und S ein Steigungsdreieck für g_2, dann erkennt man, dass die Strecke $\overline{PS}$ aus Δx und Δy mit dem Satz des Pythagoras bestimmt werden kann.

$$\begin{array}{rcll}
(\overline{PS})^2 & = & (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 & |\sqrt{\ } \\
\overline{PS} & = & \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} & \\
 & = & \sqrt{(x_s - x_p)^2 + (y_s - y_p)^2} & \\
 & = & \sqrt{(-5 - 7)^2 + (8 - 3)^2} & \\
 & = & \sqrt{144 + 25} & \\
\overline{PS} & = & 13 &
\end{array}$$

$\boxed{\text{Abstand: 13 Längeneinheiten}}$

4.10 Aufgabe 10

Die Gerade g verläuft in der Mitte zwischen den Punkten $P_1(1|-5)$ und $P_2(-5|7)$ hindurch und schneidet ihre Verbindungslinie rechtwinklig. Wie lautet die zugehörige Funktionsgleichung $f(x)$?



Lösung: Der Lösungsweg könnte folgendermaßen aussehen:
Die gesuchte Gerade muss auf der Verbindungslinie $\overline{P_1P_2}$ senkrecht stehen. Man bestimmt also die Steigung m_v der Verbindungslinie $\overline{P_1P_2}$ und berechnet daraus mit Hilfe der Formel für rechtwinkliges Schneiden die Steigung m der gesuchten Funktionsgleichung. Dann bestimmt man den Mittelpunkt M zwischen P_1 und P_2. Das kann man durch Mittelwertbildung der Koordinaten machen. Da der Mittelpunkt M einen Punkt der gesuchten Geraden darstellt, kann man seine Koordinaten in die Geradengleichung einsetzen, um damit den noch fehlenden Parameter b zu bestimmen. Diese Schritte führen wir nun der Reihe nach durch.

Die Verbindungslinie zwischen den beiden Punkten hat die Steigung m_v, die wir berechnen können. Daraus lässt sich dann die Steigung m der gesuchten Funktion bestimmen.

$$m_v = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7-(-5)}{-5-1} = \frac{12}{-6} = -2$$

$$\begin{array}{rrcll} & m_v \cdot m & = & -1 & \\ & -2 \cdot m & = & -1 & \quad |:(-2) \\ & m & = & \frac{1}{2} & \\ \Rightarrow & f(x) & = & \frac{1}{2}x + b & \end{array}$$

Um den noch unbekannten Parameter b zu bestimmen, benötigen wir eine weitere Beziehung. Bekannt ist, dass die gesuchte Gerade genau in der *Mitte* zwischen den Punkten P_1 und P_2 hindurch geht. Wenn wir die Koordinaten dieses Punktes – nennen wir ihn $M(x_M|y_M)$ – in die Funktionsgleichung einsetzen, erhalten wir b. Da der Punkt M in der Mitte zwischen den Punkten P_1 und P_2 liegt, stellen seine Koordinaten x_M und y_M

das Arithmetische Mittel zwischen den entsprechenden Koordinaten von P_1 und P_2 dar.

$$\begin{aligned}
x_M &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\
x_M &= \frac{1 + (-5)}{2} \\
x_M &= -2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_M &= \frac{y_1 + y_2}{2} \\
y_M &= \frac{-5 + 7}{2} \\
y_M &= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_M &= f(x_M) \\
1 &= \frac{1}{2} \cdot (-2) + b \\
1 &= -1 + b & | + 1 \\
2 &= b
\end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2}x + 2}$$

4.11 Aufgabe 11

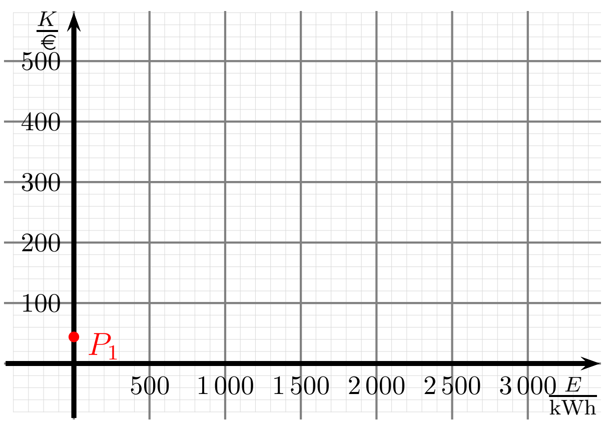
Silke zieht in die erste eigene Wohnung. Nun sucht sie nach einem für sie günstigen Tarif für elektrischen Strom. Sie fragt zwei Freunde.

Peter sagt:„Ich zahle eine jährliche Grundgebühr von 44,00 € sowie 0,23 € für jede verbrauchte Kilowattstunde.“

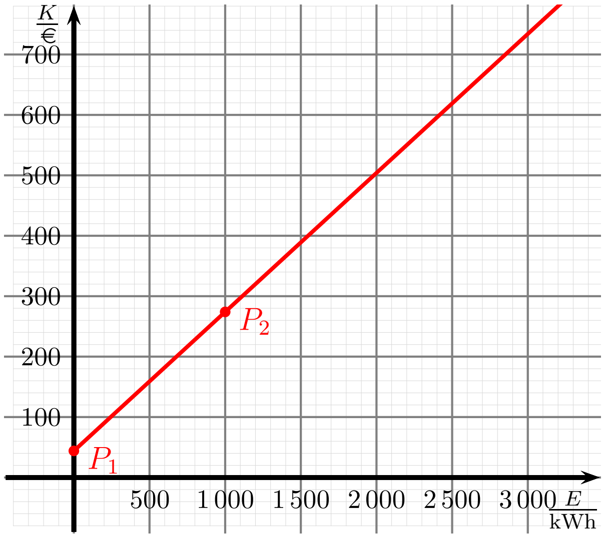
Paul sagt:„Meinen Tarif kenne ich nicht genau, aber im letzten Jahr habe ich für 1 450 kWh 370,00 € bezahlt und im vorletzten Jahr für 1 350 kWh 350,00 €.“

1. Stellen Sie den Zusammenhang zwischen dem Jahresenergieverbrauch E und den jährlichen Kosten K für beide Tarife im Bereich zwischen 0 und 3 000 kWh in einem Koordinatensystem dar. Dabei stellt die waagerechte Achse (gern auch x-Achse genannt) den Jahresenergieverbrauch E und die senkrechte Achse (gern auch y-Achse genannt) die Jahreskosten K dar.
2. Bestimmen Sie **zeichnerisch** den Jahresverbrauch, bei dem beide Tarife gleich teuer sind.
3. In welchem Bereich des Jahresverbrauches ist Peters Tarif und in welchem ist Pauls Tarif günstiger?
4. Bestimmen Sie aus den angegebenen Daten die Funktionsgleichungen:
$$K = f_1(E) \quad \text{und} \quad K = f_2(E)$$
5. **Berechnen** Sie mit Hilfe der Funktionsgleichungen den Jahresverbrauch, bei dem beide Tarife gleich teuer sind.
6. Vergleichen Sie das berechnete Ergebnis mit dem zeichnerisch ermittelten Ergebnis.

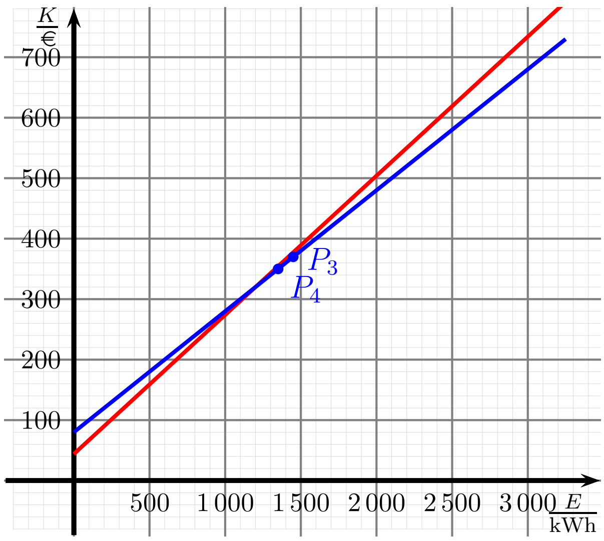
Lösung: Zu Punkt 1:
Beim Eintragen beginnen wir mit Peters Tarif. Bei einem Energieverbrauch von 0 kWh ist nur die Grundgebühr von 44 € zu zahlen. Somit haben wir den Punkt $P_1(0|44)$, der rechts eingetragen wurde. Dieser Punkt stellt den Abschnitt auf der K-Achse (y-Achse) dar.



Man könnte nun einen weiteren Punkt erhalten, indem man waagerecht eine Kilowattstunde nach rechts und entsprechend 0,23 € nach oben geht. Leider liegen diese beiden Punkte viel zu dicht nebeneinander. Daher empfiehlt es sich, größere Schritte zu machen. Im Beispiel rechts bin ich 1 000 kWh nach rechts und entsprechend 0,23 €·1 000=230 € nach oben gegangen. Dann lande ich im Punkt $P_2(1\,000|274)$. Durch P_1 und P_2 kann nun eine Gerade eingezeichnet werden, an der die Jahreskosten für jeden beliebigen Energieverbrauch zwischen 0 und 3 000 Kilowattstunden abgelesen werden kann.



Nun kommt der zweite Tarif ins Spiel. Bekannt sind zwei unterschiedliche Jahresverbräuche sowie die zugehörigen Kosten. Die Daten können als $P_3(1\,450|370)$ und $P_4(1\,350|350)$ eingetragen werden. Leider liegen diese Punkte recht dicht nebeneinander, so dass es etwas schwierig wird, die zugehörige Gerade einzuzeichnen. Versucht man es dennoch, dann erhält man die eingezeichnete blaue Linie als Funktionsgraphen für Pauls Tarif.



Zu Punkt 2:
Der Jahresverbrauch, bei dem beide Tarife gleich teuer sind, wird am Schnittpunkt der beiden Geraden abgelesen. Weil sich die beiden Geraden nur wenig unterscheiden, ist eine genaue Ablesung fast unmöglich. Man erkennt aber, dass er irgendwo zwischen einem Jahresverbrauch von 1 000 und 1 500 Kilowattstunden liegen muss.

Zu Punkt 3:
Im Bereich unterhalb des Jahresverbrauches nach Punkt 2 verläuft die rote Gerade **unterhalb** der blauen. Daher ist hier Peters Tarif der günstigere. Bei einem großen Jahresverbrauch verläuft die blaue Gerade unterhalb der roten, hier ist also Pauls Tarif der günstigere.

Zu Punkt 4:
Wie wir gesehen haben, ist eine genaue Ablesung recht schwierig. Es lohnt sich also, das Problem rechentechnisch zu lösen. Dazu benötigen wir zunächst die beiden Funktionsgleichungen.

In der Rechnung werden alle Energieen in Kilowattstunden angegeben und alle Kosten in Euro. Mit dieser Vereinbarung kann ich die Einheiten in der Rechnung der Einfachheit halber weglassen.

Beginnen wir mit Peters Tarif. Die Normalform der Funktionsgleichung für die zugehörige **Lineare Funktion** lautet:

$$K = f_1(W) = m \cdot W + b$$

Die Parameter m und b müssen bestimmt werden. Sehr einfach geht das mit dem Parameter b, denn er ist immer der Abschnitt auf der senkrechten Achse, hier also die Kosten für einen Verbrauch von 0. Das ist die Grundgebühr von 44 €. Es ist also:

$$b = 44$$

Der Parameter m stellt die Steigung der Geraden dar. Es gilt allgemein in einem Steigungsdreieck, das man an die Gerade legt:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{oder hier entsprechend:} \quad m = \frac{\Delta K}{\Delta W}$$

Wählt man für Δx (bzw. hier für ΔW) die 1, dann gibt der Zähler des Bruches direkt m an. Da ich für jede einzelne verbrauchte Kilowattstunde 0,23 € bezahlen muss, stellt dieser Wert direkt die Steigung m dar:

$$m = 0{,}23$$

Damit erhalten wir die erste Funktionsgleichung:

$$\boxed{K = f_1(W) = 0{,}23 \cdot W + 44}$$

Jetzt fehlt noch die zweite Funktion. Die Normalform lautet:

$$K = f_2(W) = m \cdot W + b$$

In dieser Funktion stellen die Parameter m und b natürlich andere Werte dar, als in der ersten Funktion.

Bekannt sind die beiden Punkte $P_3(1\,450|370)$ und $P_4(1\,350|350)$, wie bereits unter Punkt 1 beschrieben. Erinnern wir uns an die Definition der Steigung:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{oder hier entsprechend:} \quad m = \frac{\Delta K}{\Delta W}$$

Setzen wir die Koordinaten der beiden bekannten Punkte ein, erhalten wir:

$$\begin{aligned} m &= \frac{\Delta K}{\Delta W} \\ &= \frac{K_4 - K_3}{W_4 - W_3} \\ &= \frac{350 - 370}{1\,250 - 1\,350} \\ &= \frac{-\,20}{-100} \\ m &= 0{,}2 \end{aligned}$$

Mit diesem Wert für m können wir die Funktionsgleichung schon etwas konkretisieren:

$$K = f_2(W) = 0{,}2 \cdot W + b$$

Jetzt benötigen wir nur noch den Parameter b. Dazu setzt man einfach die Koordinaten eines bekannten Punktes für K und W ein. Man erhält eine Gleichung, mit deren Hilfe man b berechnen kann. Ich wähle willkürlich die Koordinaten des Punktes $P_3(1\,450|370)$. (Möglich wären aber genau so gut auch die Koordinaten des anderen bekannten Punktes.)

$$\begin{aligned} K_3 &= f_2(W_3) \\ K_3 &= 0{,}2 \cdot W_3 + b \\ 370 &= 0{,}2 \cdot 1\,450 + b \\ 370 &= 290 + b \qquad |-290 \\ 80 &= b \end{aligned}$$

Mit diesem Wert für b kann nun die zweite Funktionsgleichung angegeben werden:

$$\boxed{K = f_2(W) = 0{,}2 \cdot W + 80}$$

Zu Punkt 5:
Die Koordinaten der Schnittpunktes – also den Jahresverbrauch, bei dem beide Tarife gleuch teuer sind – erhält man, indem man die Funktionsterme **gleichsetzt**. Diesen Jahresverbrauch nenne ich E_S.

$$\begin{aligned} f_1(E_S) &= f_2(E_S) \\ 0{,}23 \cdot W_S + 44 &= 0{,}2 \cdot W_S + 80 \quad |-0{,}2 \cdot W_S - 44 \\ 0{,}03 \cdot W_S &= 36 \qquad |:0{,}03 \\ W_S &= 1\,200 \end{aligned}$$

Ergebnis: Bei einem Jahresverbrauch von 1 200 kWh sind beide Tarife gleich teuer.

Zu Punkt 6:
Der berechnete Wert passt zum abgelesenen Wert, ist aber genauer bestimmbar.

4.12 Aufgabe 12

Lisa und Fiona wohnen im selben Haus und besuchen die selbe Schule, die 2,4 km vom Wohnhaus entfernt liegt. Lisa geht mit einer Geschwindigkeit von 6 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ zu Fuß zur Schule, Fiona nutzt das Fahrrad mit einer Geschwindigkeit von 18 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Lisa läuft um 8:00 Uhr los. Fiona steigt um 8:14 Uhr auf das Fahrrad.

1. Stellen Sie in einem Koordinatensystem den zurückgelegten Weg als Funktion der Zeit für Lisa und Fiona dar!

2. Klären Sie zeichnerisch die Frage, ob Fiona Lisa noch vor Erreichen der Schule überholt. Falls das der Fall ist, um wieviel Uhr und in welcher Entfernung von der Schule passiert das?

3. Stellen Sie für Lisa und Fiona die Funktionsgleichung auf, die den zurückgelegten Weg s als Funktion der Zeit t darstellt.

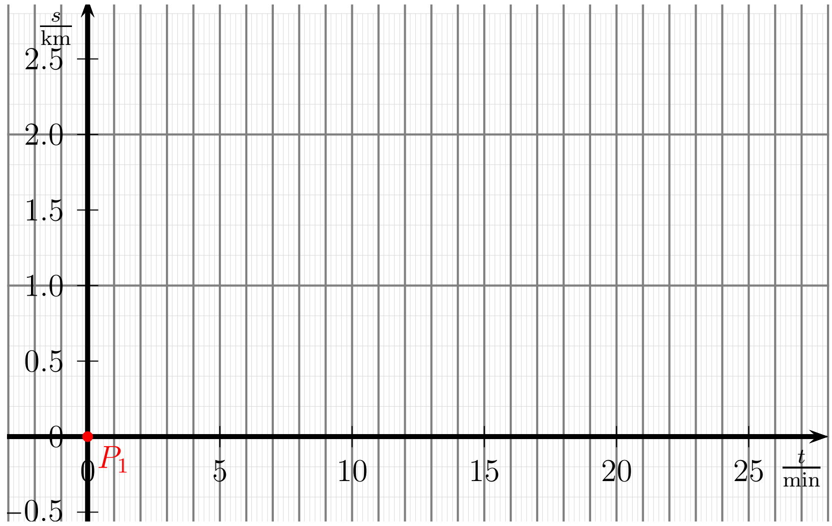
$$s = f(t)$$

4. Bestimmen Sie **rechnerisch** den Zeitpunkt und die Entfernung von der Schule, an dem Fiona Lisa überholt.

Lösung: Man muss sich zunächst über einige Details zum Koordinatensystem Gedanken machen. Man kann an die (waagerechte) Zeitachse **Uhr**zeiten schreiben, oder auch bei 0 beginnende Zeiten in einer passenden Einheit. Beides ist möglich. Vorab ist aber die Frage zu klären, welche Einheit man wohl für die Zeit nehmen sollte. Bei der Einheit der angegebenen Geschwindigkeiten kommt die Stunde vor (Kilometer pro **Stunde**). Von daher bietet sich die Einheit „Stunde“ an. Andererseits sagt die Lebenserfahrung, dass man solche Wege nicht im Stundenbereich zurücklegt, sondern eher im Minutenbereich. Daher wähle ich hier die **Minute** zur Skalierung. Wenn man das so macht, dann ist es sinnvoller, die Zeitachse nicht bei $8:00\,\text{h}$ beginnen zu lassen, sondern bei der 0 für 0 Minuten. Für die zurückgelegte Wegstrecke kann man Kilometer oder auch Meter verwenden.

Ich entscheide mich willkürlich für die Zeiteinheit **Minuten** und die Wegstreckeneinheit **Kilometer**. Die Zeitachse beginnt bei 0, wenn Lisa das Haus verlässt. Der Startzeitpunkt für Fiona liegt dann bei $t = 14\,\text{min}$.

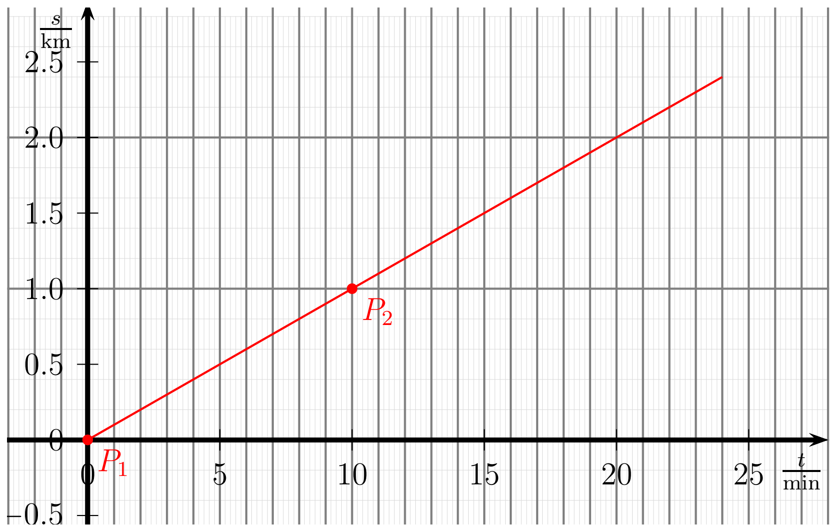
Nebenstehend ist ein geeignetes Koordinatensystem dargestellt.



Beginnen wir mit der Läuferin Lisa. Sie startet um 8:00 Uhr. Im Diagramm gehört dazu der Zeitpunkt $t = 0$. Da zu diesem Zeitpunkt auch noch kein Weg zurückgelegt wurde, ist auch $s = 0$. Wir erhalten demnach als Startpunkt den rot eingezeichneten Punkt $P_1(0|0)$.

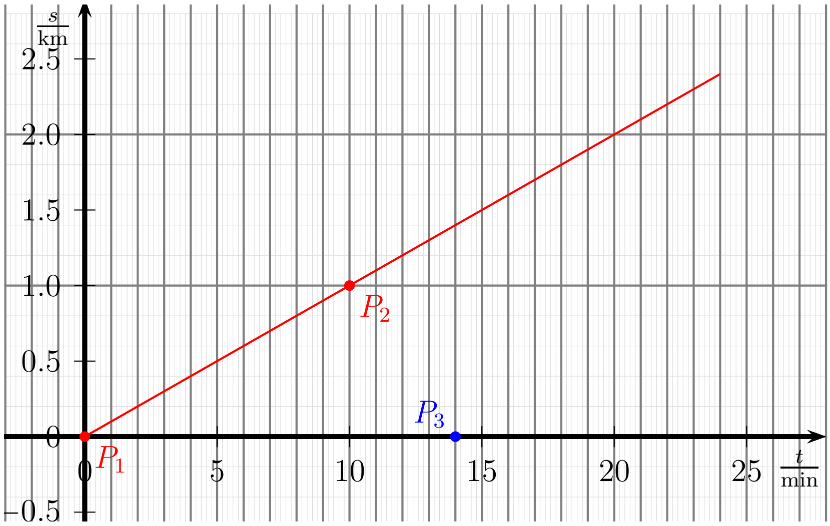
In **einer Stunde** legt sie **6 Kilometer** zurück. Das sagt die Geschwindigkeitsangabe **6 Kilometer pro Stunde**. Der Versuch, diesen Punkt einzutragen, schlägt aber fehl. Eine Stunde sind 60 Minuten, das ist jenseits des dargestellten Bereiches. Auch **6 Kilometer** passt nicht ins dargestellte Diagramm.

Man kann nun entweder die Zeit für einen kürzeren Weg, oder den Weg für eine kürzere Zeit ausrechnen. Alternativ kann man auch die Einheit *Kilometer pro Stunde* in *Kilometer pro Minute* umrechnen. Alles ist möglich und auch sinnvoll.



Beispielhaft möchte ich den Weg ausrechnen, der in 10 Minuten zurückgelegt wird. Das ist ein Sechstel einer Stunde. Somit legt man auch ein Sechstel von 6 Kilometern zurüch. Das ist ein Kilometer. Ich erhalte damit den Punkt $P_2(10|1)$. Den kann ich eintragen und die Gerade einzeichnen. Die Gerade **endet** übrigens bei 2,4 Kilometern, denn da ist Lisa in der Schule angekommen. Wie auch immer man es macht, man kommt zu der rot eingezeichneten Gerade, an der man nun ablesen kann, wie weit Lisa nach welcher Zeit gekommen ist.

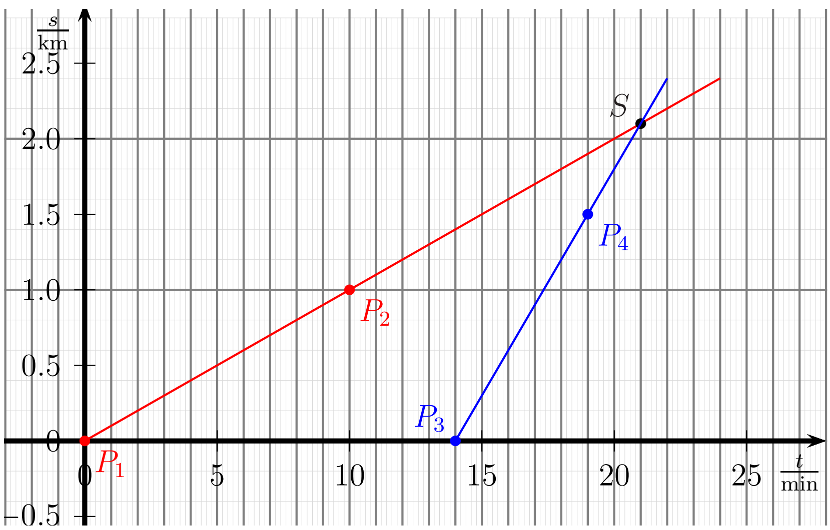
Nun kommt Fiona mit ihrem Fahrrad ins Spiel. Sie fährt um 8:14 Uhr los, also zum Zeitpunkt $t = 14$. Diesen Punkt nenne ich $P_3(14|0)$. Die Null beruht darauf, dass Fiona zu diesem Zeitpunkt gerade erst losfährt, also noch keinen Meter weit gekommen ist.



Jetzt fehlt noch ein weiterer Punkt, damit die Gerade eingezeichnet werden kann. Wie schon bei der Läuferin Lisa kann man bei der Fahrradfahrerin Fiona keinen Punkt bei einer Stunde bzw. 18 Kilometern eintragen. Man muss auch hier auf eine kürzere Zeitspanne oder einen kürzeren Weg umrechnen.

Zur Abwechslung rechnen ich hier die Geschwindigkeitseinheit $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ in $\frac{\text{km}}{\text{min}}$ umrechnen. Das geht beispielsweise so:

$$\begin{aligned} 18\,\frac{\text{km}}{\text{h}} &= 18\,\frac{\text{km}}{60\,\text{min}} \\ &= \frac{18}{60}\,\frac{\text{km}}{\text{min}} \\ &= 0{,}3\,\frac{\text{km}}{\text{min}} \end{aligned}$$



Demnach kann ich ein Steigungsdreieck mit einem Schritt nach **rechts** und 0,3 Schritten nach **oben** einzeichnen. Weil das etwas klein ist, wähle ich 5 Schritte nach rechts und somit $5 \cdot 0,3 = 1{,}5$ Schritte nach oben. So erhalte ich den Punkt $P_4(19|1{,}5)$ und kann die Gerade einzeichnen.

An diesem Diagramm kann ich nun am Schnittpunkt S ablesen, wann und wo Fiona Lisa überholt. Das passiert zum Zeitpunkt $t_s = 21\,\text{min}$ am Ort $s_s = 2{,}1\,\text{km}$. Dieser Ort liegt 0,3 km (oder 300 Meter) vor der Schule. Die Uhrzeit, die dazu gehört, wäre 21 Minuten später als 8:00 Uhr, also 8:21 Uhr.

Nun geht es um die zugehörigen Funktionsgleichungen. Als Lineare Funktionen haben sie diese Form:

$$s = f(t) = m \cdot t + b$$

wobei die Parameter m und b noch zu bestimmen sind.

Vorab möchte ich festlegen, dass alle Strecken in der Einheit *Kilometer* und alle Zeiten in der Einheit *Meter* angegeben werden sollen. Dann kann ich innerhalb der Rechnung die Einheiten weglassen.

Beginnen wir bei der Läuferin Lisa. Ich nenne die zugehörige Funktion $f_L(t)$. Die Funktion der Fahrradfahrerin Fiona heißt dann $f_F(t)$. Lisa startet zum Zeitpunkt t=0. Zu diesem Zeitpunkt hat sie 0 km zurückgelegt, der zugehörige Punkt heißt somit $P_1(0|0)$, der s-Achsenabschnitt ist also:

$$b = 0$$

Die Steigung m erhalten wir über ein beliebiges Steigungsdreieck. Ich verwende dazu die Geschwindigkeitsangabe von 6 Kilometern in einer Stunde, also 6 Kilometern in 60 Minuten.

Im Regelheft steht die Definition für die Steigung:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Auf die hier verwendeten Variablen s und t übertragen lautet die Formel:

$$m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Hier setze ich die Daten aus der Geschwindigkeitsangabe ein.

$$m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{6}{60} = 0{,}1$$

Mit diesen Werten für m und b kann die Funkttionsgleichung angegeben werden. Da $b = 0$ ist, kann b auch gleich weggelassen werden. Somit lautet die Funktion für Lisa:

$$\boxed{f_L = 0{,}1t}$$

Zu beachten ist, dass diese Funktion nur im Bereich zwischen 0 und 2,4 Kilometern gültig ist, weil Lisa nach 2,4 Kilometern an der Schule angekommen ist und somit nicht weiter läuft. Das ist gleichbedeutend mit dem Zeitbereich von $t = 0$ bis $t = 24$. Mathematisch wird so etwas als **eingeschränkter Definitionsbereich** bezeichnet. Das schreibt man in dieser Form:[5]

$$D = \mathbb{R} \cap \{t | 0 \leq t \leq 24\}$$

[5] Einzelheiten zur Mengenschreibweise siehe auch hier:
https://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/mengen.pdf

Das liest sich so:

> ***Die Menge aller Reellen Zahlen im Bereich zwischen 0 und 24 einschließlich der Bereichsgrenzen.***

Auch für die Fahrradfahrerin Fiona kann die Steigung aus der Geschwindigkeitsangabe von 18 Kilometern in einer Stunde bzw. 18 Kilometern in 60 Minuten entnommen werden.

$$m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{18}{60} = 0{,}3$$

Bis hier lautet die Funktionsgleichung demnach:

$$f_F(t) = 0{,}3s + b$$

Der Parameter b muss noch berechnet werden. Wir wissen, dass Fiona zu ihrem Startzeitpunkt $t = 17$ die Strecke $s = 0$ zurückgelegt hat. Dazu gehört der Punkt $P_3(14|0)$. Zur Bestimmung des Parameters b können diese Werte in die Funktionsgleichung eingesetzt werden.

$$\begin{array}{rcll} f_F(14) & = & 0 & \\ 0{,}3 \cdot 14 + b & = & 0 & \\ 4{,}2 + b & = & 0 & \quad | - 4{,}2 \\ b & = & -4{,}2 & \end{array}$$

Hiermit kann die Funktionsgleichung für die Fahrradfahrerin Fiona angegeben werden:

$$\boxed{f_F = 0{,}3t - 4{,}2}$$

Auch hier gibt es einen eingeschränkten Definitionsbereich. Gestartet ist sie zum Zeitpunkt $t = 14$. Wie man leicht ausrechnen kann, ist Fiona zum Zeitpunkt $t = 22$ an der Schule angekommen. Nur zwischen diesen beiden Werten ist die Funktion gültig. Als Definitionsbereich geschrieben sieht das so aus:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{t|14 \leq t \leq 22\}$$

Zum Schluss muss noch **berechnet** werden, dann Fiona Lisa überholt. Mathematisch gesehen ist das eine **Schnittpunktbestimmung**. Um die Koordinaten des Schnittpunktes $S(t_s|s_s)$ zu berechnen setzt man die Funktionsterme gleich.

$$\begin{array}{rcll} f_L(t_s) & = & f_F(t_s) & \\ 0{,}1t_s & = & 0{,}3t - 4{,}2 & | - 0{,}3t_s \\ -0{,}2t_s & = & -4{,}2 & | : (-0{,}2 \\ t_s & = & 21 & \end{array}$$

<u>Ergebnis 1:</u> 21 Minuten nach dem Start der Läuferin Lisa wird sie überholt. Weil sie um 8:00 Uhr losgelaufen ist, findet der Überholvorgang um 8:21 Uhr statt.

Die letzte Frage, die noch geklärt werden muss, ist die Frage nach der Entfernung von der Schule beim Überholen. Dazu berechnen wir zunächst die Strecke s_s, die zum Schnittpunkt gehört. Dazu setzt man den gefundenen Wert von t_s in eine beliebige der beiden Funktionsgleichungen ein. Weil die Funktionsgleichung f_L etwas einfacher ist, nehme ich diese.

$$s_s = f_L(t_s) = 0{,}1 \cdot 21 = 2,1$$

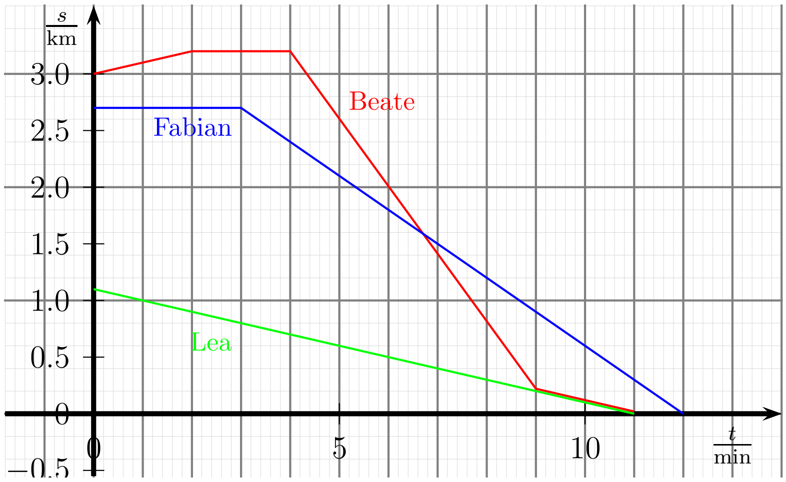
Nach einem gelaufenen Weg von 2,1 Kilometern wird die Läuferin Lisa überholt. Da der Weg bis zur Schule 2,4 Kilometer lang ist, ist die Differenz der Abstand von der Schule.

Ergebnis 2: Der Überholvorgang findet 0,3 Kilometer (oder 300 Meter) vor der Schule statt.

4.13 Aufgabe 13

Nebenstehend sind von drei Schülern die Weg-Zeit-Diagramme dargestellt. An der Weg-Achse ist der Abstand von der Schule eingetragen.

Erzählen Sie zu jedem Schulweg, was dort passiert.



Lösung: Beginnen wir mit **Lea**:
Sie wohnt 1,1 Kilometer von der Schule entfernt. Das kann man am s-Achsenabschnitt ablesen. Der Funktionsgraph schneidet die t-Achse bei 11 Minuten. Sie ist also nach 11 Minuten an der Schule angekommen. Berechnen wir ihre Geschwindigkeit v_L:

$$v_L = \frac{1{,}1\,\mathrm{km}}{11\,\mathrm{min}} = 0{,}1\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{min}} = 0{,}1\,\frac{\mathrm{km}}{\frac{1}{60}\mathrm{h}} = 6\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

Das ist eine typische Fußgängergeschwindigkeit. Sie ist offenbar zu Fuß zur Schule gegangen.

Jetzt kommen wir zu **Fabian**:
Er wohnt 2,7 Kilometer von der Schule entfernt. Als Lea von zu Hause losging, blieb er noch weitere 3 Minuten zu Hause. Das zeigt die waagerechte Linie, die Entfernung ändete sich nicht. Den Schulweg bewältigt er dann in 9 Minuten. Berechnen wir auch seine Geschwindigkeit v_F:

$$v_F = \frac{2{,}7\,\mathrm{km}}{9\,\mathrm{min}} = 0{,}3\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{min}} = 0{,}3\,\frac{\mathrm{km}}{\frac{1}{60}\mathrm{h}} = 18\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

Das ist für einen Fußgänger zu schnell, das ist eher die Geschwindigkeit eines Radfahrers, der nicht allzu schnell fährt. Fabian ist offenbar mit dem Rad zur Schule gefahren und kam eine Minute nach Lea dort an.

Nun zu **Beate**:
Sie entfernt sich zunächst von der Schule! Warum macht sie das? Dabei legt sie in 2 Minuten 200 Meter zurück. Das ist eine typische Fußgängergeschwindigkeit. Man erkennt das auch daran, dass der zugehörige Funktionsgraph hier die gleiche Steigung hat, wie der von Lea, allerdings mit umgekehrtem Vorzeichen, weil sie in die „falsche“ Richtung läuft. Dann bewegt sie sich für zwei Minuten nicht von der Stelle. Anschließend legt sie in 5 Minuten (von Minute 4 bis Minute 9) eine Strecke von 3 Kilometern Richtung Schule zurück. Berechnen wir hierfür ihre Geschwindigkeit v_B:

$$v_B = \frac{3\,\mathrm{km}}{5\,\mathrm{min}} = 0{,}6\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{min}} = 0{,}6\,\frac{\mathrm{km}}{\frac{1}{60}\mathrm{h}} = 36\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

Diese Geschwindigkeit ist zu Fuß nicht und mit dem Fahrrad nur sehr schwer zu schaffen. Hier kommt eigentlich nur ein Bus, eine Straßenbahn oder ähnliches in Betracht. Offensichtlich nutzt sie den ÖPNV. Dafür spricht auch, dass sie sich von Minute 2 bis Minute 4 nicht weiterbewegt hat. Hier hat sie auf den Bus gewartet. Offenbar liegt die heimische Bushaltestelle in der umgekehrten Richtung zur Schule. Deswegen musste sie zunächst noch 200 Meter in die „falsche“ Richtung laufen. 200 Meter entfernt von der Schule liegt die Haltestelle, wo sie aussteigen muss. Hier trifft sie auf Lea, die beiden gehen die letzten 200 Meter gemeinsam zur Schule.